Funzioni Lipschitziane

Proposizione 1 (Lipschitz $\Rightarrow$ Sobolev)**.** *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u : B_R \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz $L > 0$,*

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y| \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_R.$$

Allora, $u \in H^1(B_R)$, $|\nabla u| \in L^\infty(B_R)$ e $\|\nabla u\|_{L^\infty(B_R)} \leq L$.

Proof. Per esercizio. □

Proposizione 2. *Siano $B_R \subset \mathbb{R}^d$ e $u \in H^1(B_R)$. Se $|\nabla u| \in L^\infty(B_R)$, allora u è Lipschitziana e*

$$|u(x) - u(y)| \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(B_R)}|x - y| \qquad \textit{per ogni} \qquad x, y \in B_R.$$

Proof. Per ogni coppia di punti $x_0, y_0 \in B_R$ consideriamo $r > 0$ tale che

$$B_r(x_0) \subset B_R \qquad \text{e} \qquad B_r(y_0) \subset B_R.$$

Ora, osserviamo che

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(x_0)} u(x)\,dx - \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r(y_0)} u(x)\,dx\right| &\leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r} \Big|u(x_0 + x) - u(y_0 + x)\Big|\,dx \\ &\leq \frac{1}{|B_r|}\int_{B_r}\int_0^1 |x_0 - y_0|\,|\nabla u|(y_0 + t(x_0 - y_0) + x)\,dt\,dx \\ &\leq L|x - y|.\end{aligned}$$

Quindi, per ogni coppia di punti di Lebesgue, x_0, y_0, abbiamo

$$|u(x_0) - u(y_0)| \leq L|x_0 - y_0|.$$

Infine, basta definire u in un punto qualsiasi $z \in B_R$ come

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u(x_n),$$

dove x_n è una successione di punti di Lebesgue che converge a z. □